ОТЧЕТ Вариант 13

Задание 1. Построение таблиц истинности. Построить таблицу истинности для заданной формулы:

$F = \neg(\neg(\neg A \vee \neg B \vee C) \vee \neg(A \vee C) \vee A\&\neg B)$

Решение.

Построим таблицу истинности.

A	B	C	¬A ∨¬B ∨ C	¬(¬A ∨¬B ∨ C)	¬(A ∨ C)	A&¬B	F
0	0	0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	1

Для конъюнкции A&¬B скобки не нужны, учитываем приоритет конъюнкции по отношению к дизъюнкции.

Задание 3. Представить в ДНФ и в КНФ следующую формулу:

$$(C \to (\neg A \vee B \vee C)) \to (A \,\&\, B \,\&\, C)$$

Решение.

Выполним преобразования по шагам.

Получим ДНФ, используя тождество $A \to B = \neg A \vee B$ и формулы Де-Моргана.

$\left(C \to (\neg A \vee B \vee C)\right) \to (A \,\&\, B \,\&\, C) = \neg(\neg C \vee (\neg A \vee B \vee C)) \vee (A \,\&\, B \,\&\, C) =$

$= C\&\neg(\neg A \vee B \vee C) \vee (A \,\&\, B \,\&\, C) = C\&(A\&\neg B\&\neg C) \vee A \,\&\, B \,\&\, C = A \,\&\, B \,\&\, C$ – **ДНФ**

На последнем шаге учли, что $C\&(A\&\neg B\&\neg C)=0$ и $0 \vee A \,\&\, B \,\&\, C = A \,\&\, B \,\&\, C$

$A \,\&\, B \,\&\, C$ подходит и под определение **КНФ**, дополнительное преобразование не требуется.

Задание 4

Формализовать представленное рассуждение в виде формулы алгебры логики.

«Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей.»

Решение.

Введем буквенные обозначения для атомарных высказываний:

A: Джонс не встречал этой ночью Смита

B: Смит был убийцей

C: Джонс лжет

D: убийство имело место после полуночи

Обозначим красным цветом логические связки между атомами.

«Если Джонс не встречал этой ночью Смита, то либо Смит был убийцей, либо Джонс лжет. Если Смит не был убийцей, то Джонс не встречал его этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джонс не лжет. Следовательно, Смит был убийцей.»

Подставляем обозначения для атомов:

Если A, то B или C.

Если не B, то A и D.

Если D, то B или не C.

Следовательно, B.

Окончательно:

Формализация рассуждения.

$$A \to (B \vee C), \neg B \to A \& D, D \to (B \vee \neg C) \vdash B$$

Задание 5

Для формализованного в задаче 4 рассуждения доказать логическое следствие заключения из посылок.

Решение.

В формализованном выше рассуждении из трёх посылок следует заключение B.

$A \to (B \vee C)$

$\neg B \to A \& D$

$D \to (B \vee \neg C)$

B

Доказательство логического следования.

Построим формулу по Теореме 1 о логическом следовании:

$$(A \to (B \vee C))\&(\neg B \to A\&D)\&(D \to (B \vee \neg C)) \to B$$

Наша цель – доказать общезначимость этой формулы.

Выполним следующие преобразования. Избавляемся от импликаций:

$(A \to (B \vee C))\&(\neg B \to A\&D)\&(D \to (B \vee \neg C)) \to B =$

$= \neg((\neg A \vee B \vee C)\&(B \vee A\&D)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)) \vee B$

Применяем правила Де-Моргана:

$\neg((\neg A \vee B \vee C)\&(B \vee A\&D)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)) \vee B =$

$= \neg(\neg A \vee B \vee C) \vee \neg(B \vee A\&D) \vee \neg(\neg D \vee B \vee \neg C) \vee B =$

$= A\&\neg B\&\neg C \vee \neg B\&(\neg A \vee \neg D) \vee D\&\neg B\&C \vee B =$

$= A\&\neg B\&\neg C \vee \neg B\&\neg A \vee \neg B\&\neg D \vee D\&\neg B\&C \vee B$

Перегруппируем для наглядности логические слагаемые и применим известное тождество (например, $(A\& \neg B) \vee \neg A$ заменяем на $\neg A \vee \neg B$):

$(\neg B\&\neg A \vee B) \vee A\&\neg B\&\neg C \vee \neg B\&\neg D \vee D\&\neg B\&C =$

$=\neg A \vee B \vee A\&\neg B\&\neg C \vee \neg B\&\neg D \vee D\&\neg B\&C =$

$= (A\&\neg B\&\neg C \vee B) \vee \neg A \vee \neg B\&\neg D \vee D\&\neg B\&C =$

$= A\&\neg C \vee B \vee \neg A \vee \neg B\&\neg D \vee D\&\neg B\&C =$

$=(A\&\neg C \vee \neg A) \vee (B \vee \neg B\&\neg D) \vee D\&\neg B\&C =$

$= \neg C \vee \neg A \vee B \vee (\neg D \vee D\&\neg B\&C) = \neg C \vee \neg A \vee \neg D \vee (B \vee \neg B\&C) =$

$= \neg C \vee \neg A \vee \neg D \vee B \vee C= (\neg C \vee C) \vee \neg A \vee \neg D \vee B = И$

Доказательство логического следования от противного.

Построим формулу по Теореме 2 о логическом следовании:

$$(A \to (B \vee C))\&(\neg B \to A\&D)\&(D \to (B \vee \neg C))\&\neg B$$

Докажем ее противоречивость.

$(A \to (B \vee C))\&(\neg B \to A\&D)\&(D \to (B \vee \neg C))\&\neg B =$

$=(\neg A \vee B \vee C)\&(B \vee A\&D)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)\&\neg B =$

$= ((B \vee A\&D)\&\neg B)\&(\neg A \vee B \vee C)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)=$

$= A\&\neg B\&D \&(\neg A \vee B \vee C)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)= A\&\neg B\&C\&D \&(\neg D \vee B \vee \neg C)= Л$

Задание 9

Доказать справедливость рассуждения (взять свой вариант из задания 4) методом резолюций.

Решение.

В задании 4 получена формализация рассуждения:

$$A \rightarrow (B \vee C), \neg B \rightarrow A\&D, D \rightarrow (B \vee \neg C) \vdash B$$

Доказываем логическое следствие заключения B из посылок

$A \rightarrow (B \vee C), \neg B \rightarrow A\&D, D \rightarrow (B \vee \neg C)$.

Доказательство методом резолюции выполняется только «от противного»: к произведению всех посылок добавляем *отрицание* заключения:

$$(\neg A \vee B \vee C)\&(B \vee A\&D)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)\&\neg B$$

Приводим к КНФ:

$$(\neg A \vee B \vee C)\&(B \vee A)\&(B \vee D)\&(\neg D \vee B \vee \neg C)\&\neg B$$

Строим S – множество дизъюнктов, входящих в КНФ:

S = {D1, D2, D3, D4, D5}, где

D1 = $\neg A \vee B \vee C$

D2 = $B \vee A$

D3 = $B \vee D$

D4 = $\neg D \vee B \vee \neg C$

D5 = $\neg B$

Для доказательства противоречивости S нужно убедиться в том, что множество дизъюнктов S содержит пустой (ложный) дизъюнкт □.

Поскольку S первоначально такого дизъюнкта не содержит, надо вывести его, используя правило порождения новых дизъюнктов из исходных. Новые дизъюнкты получаем методом резолюции и добавляем их к множеству S.

D1 = $\neg A \vee B \vee C$

D2 = $B \vee A$

D3 = $B \vee D$

D4 = $\neg D \vee B \vee \neg C$

D5 = $\neg B$

D6: D (резольвента D3, D5)

D7: $B \vee \neg C$ (резольвента D4, D6)

D8: ¬C (резольвента D5, D7)

D9: $\neg A \vee B$ (резольвента D1, D8)

D10: B (резольвента D2, D9)

D11: □ (резольвента D5, D10)

Итак, мы вывели пустой дизъюнкт и доказали противоречивость множества S. Для наглядности процесс вывода пустого дизъюнкта представлен в виде дерева. Каждому узлу дерева приписан дизъюнкт из S или резольвента предыдущих дизъюнктов.